

2015 年全国初中数学联合竞赛试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试(A)

一、选择题：(本题满分 42 分，每小题 7 分)

1. 设实数 a, b, c 满足： $a+b+c=3$ ， $a^2+b^2+c^2=4$ ，则 $\frac{a^2+b^2}{2-c} + \frac{b^2+c^2}{2-a} + \frac{c^2+a^2}{2-b} =$ ()

- A. 0 B. 3 C. 6 D. 9

【答】 D.

$$\because a+b+c=3, \quad a^2+b^2+c^2=4,$$

$$\therefore \frac{a^2+b^2}{2-c} + \frac{b^2+c^2}{2-a} + \frac{c^2+a^2}{2-b} = \frac{4-c^2}{2-c} + \frac{4-a^2}{2-a} + \frac{4-b^2}{2-b} = (2+c) + (2+a) + (2+b)$$

$$= 6 + (a+b+c) = 9.$$

2. 若抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个公共点，且过点 $A(m, n)$ ， $B(m-8, n)$ ，则 $n =$ ()

- A. 8. B. 12. C. 16. D. 24.

【答】 C.

依题意，有 $n = m^2 + bm + c = (m-8)^2 + b(m-8) + c$ ，于是可得 $b = 8 - 2m$.

\because 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴只有一个公共点， $\therefore b^2 - 4c = 0$ ， $\therefore c = \frac{1}{4}b^2 = (4-m)^2$.

因此 $n = m^2 + bm + c = m^2 + (8-2m)m + (4-m)^2 = 16$.

3. 矩形 $ABCD$ 中， $AD = 5$ ， $AB = 10$ ， E 、 F 分别为矩形外的两点， $BE = DF = 4$ ， $AF = CE = 3$ ，则 $EF =$ ()

- A. $4\sqrt{15}$. B. 15. C. $\sqrt{221}$. D. $10\sqrt{2}$.

【答】 C.

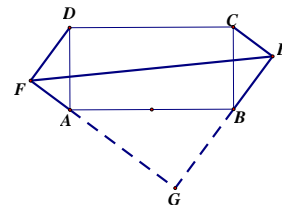
易知 $\angle AFD = \angle BEC = 90^\circ$ ， $\triangle BEC \cong \triangle DFA$ ， $\therefore \angle DAF = \angle BCE$.

延长 FA ， EB 交于点 G .

$\because \angle GAB = 90^\circ - \angle DAF = \angle ADF$ ， $\angle GBA = 90^\circ - \angle CBE = \angle BCE = \angle DAF$ ，

$\therefore \triangle BGA \sim \triangle AFD$ ，且 $\angle AGB = 90^\circ$ ， $\therefore AG = 8$ ， $BG = 6$ ，

$\therefore GF = 11$ ， $GE = 10$ ， $\therefore EF = \sqrt{GE^2 + GF^2} = \sqrt{221}$.



4. 已知 O 为坐标原点，位于第一象限的点 A 在反比例函数 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 的图象上，位于第二象限的点 B 在反比例函数 $y = -\frac{4}{x} (x < 0)$ 的图象上，且 $OA \perp OB$ ，则 $\tan \angle ABO$ 的值为 ()

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C.1.

D.2.

【答】A.

过点 A 、 B 分别作 $AC \perp x$ 轴， $BD \perp x$ 轴，垂足为 C 、 D 。由 $OA \perp OB$ 得 $\angle AOB = 90^\circ$ ，于是可

$$\text{得 } \triangle AOC \sim \triangle OBD, \text{ 所以 } \tan \angle ABO = \frac{OA}{OB} = \sqrt{\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle OBD}}} = \sqrt{\frac{OC \cdot AC}{OD \cdot BD}} = \sqrt{\frac{|x_A \cdot y_A|}{|x_B \cdot y_B|}} = \sqrt{\frac{1}{|-4|}} = \frac{1}{2}.$$

5. 已知实数 x, y 满足关系式 $xy - x - y = 1$ ，则 $x^2 + y^2$ 的最小值为 ()

A. $3 - 2\sqrt{2}$.

B. $6 - 4\sqrt{2}$.

C.1.

D. $6 + 4\sqrt{2}$.

【答】B.

设 $x + y = t$ ，则由题设条件可知 $xy = x + y + 1 = t + 1$ ，所以 x, y 是关于 m 的一元二次方程

$$m^2 - tm + t + 1 = 0 \text{ 的两个实数根，于是有：} \Delta = t^2 - 4(t + 1) \geq 0, \text{ 解得 } t \geq 2 + 2\sqrt{2} \text{ 或 } t \leq 2 - 2\sqrt{2}.$$

又因为 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = t^2 - 2(t + 1) = (t - 1)^2 - 3$ ，所以，当 $t = 2 - 2\sqrt{2}$ (即 $x = y = 1 - \sqrt{2}$)

时， $x^2 + y^2$ 取得最小值，最小值为 $(2 - 2\sqrt{2} - 1)^2 - 3 = 6 - 4\sqrt{2}$ 。

6. 设 n 是小于 100 的正整数且使 $5n^2 + 3n - 5$ 是 15 的倍数，则符合条件的所有正整数 n 的和是 ()

A.285.

B.350.

C.540.

D.635.

【答】D.

$\because 5n^2 + 3n - 5$ 是 15 的倍数， $\therefore 5 | (5n^2 + 3n - 5)$ ， $\therefore 5 | 3n$ ， $\therefore 5 | n$ ，设 $n = 5m$ (m 是正整数)，

$$\text{则 } 5n^2 + 3n - 5 = 125m^2 + 15m - 5 = 120m^2 + 15m + 5(m^2 - 1).$$

$\because 5n^2 + 3n - 5$ 是 15 的倍数， $\therefore m^2 - 1$ 是 3 的倍数， $\therefore m = 3k + 1$ 或 $m = 3k + 2$ ，其中 k 是非负整数。

$\therefore n = 5(3k + 1) = 15k + 5$ 或 $n = 5(3k + 2) = 15k + 10$ ，其中 k 是非负整数。

\therefore 符合条件的所有正整数 n 的和是 $(5 + 20 + 35 + 50 + 65 + 80 + 95) + (10 + 25 + 40 + 55 + 70 + 85) = 635$ 。

二、填空题：(本题满分 28 分，每小题 7 分)

1. 设 a, b 是一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两根，则 $3a^3 + 4b + \frac{2}{a^2}$ 的值为_____。

【答】11.

$\because a, b$ 是一元二次方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两根， $\therefore ab = -1$ ， $a + b = 1$ ， $a^2 = a + 1$ ， $b^2 = b + 1$ ，

$$\therefore 3a^3 + 4b + \frac{2}{a^2} = 3a^3 + 4b + 2b^2 = 3a(a + 1) + 4b + 2(b + 1) = 3a^2 + 3a + 6b + 2$$

$$= 3(a + 1) + 3a + 6b + 2 = 6(a + b) + 5 = 11.$$

2. 从三边长均为整数且周长为 24 的三角形中任取一个，它是直角三角形的概率为_____.

【答】 $\frac{1}{12}$.

设三角形的三边长为 a, b, c ($a \geq b \geq c$), 则 $3a \geq a + b + c = 24$, $2a < a + (b + c) = 24$, 所以

$8 \leq a < 12$, 故 a 的可能取值为 8, 9, 10 或 11, 满足题意的数组 (a, b, c) 可以为:

(8, 8, 8), (9, 9, 6), (9, 8, 7), (10, 10, 4), (10, 9, 5), (10, 8, 6),
(10, 7, 7), (11, 11, 2), (11, 10, 3), (11, 9, 4), (11, 8, 5), (11, 7, 6),

共 12 组, 其中, 只有一组是直角三角形的三边长, 所以, 所求概率为 $\frac{1}{12}$.

3. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 O , AO 交 BC 于 D , E 、 F 分别为 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 的外心, 若 $AB > AC$, $EF = BC$, 则 $\angle C - \angle B =$ _____.

【答】 60° .

作 $EM \perp BC$ 于点 M , $FN \perp BC$ 于点 N , $FP \perp EM$ 于点 P .

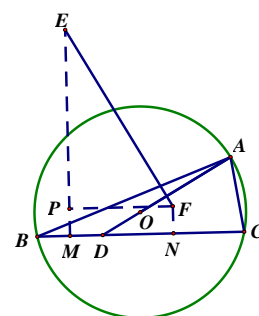
$\because E$ 、 F 分别为 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 的外心, $\therefore M$ 、 N 分别为 BD 、 CD 的中点.

又 $EF = BC$, $\therefore PF = MN = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}EF$, $\therefore \angle PEF = 30^\circ$.

又 $EF \perp AD$, $EM \perp BC$, $\therefore \angle ADC = \angle PEF = 30^\circ$.

又 $\angle ADC = \angle B + \angle BAD = \angle B + \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle C) = 90^\circ + \angle B - \angle C$,

$\therefore \angle C - \angle B = 90^\circ - \angle ADC = 60^\circ$.



4. 将数字 1, 2, 3, ..., 34, 35, 36 填在 6×6 的方格中, 每个方格填一个数字, 要求每行数字从左到右是从小到大的顺序, 则第三列所填 6 个数字的和的最小值为_____.

【答】63.

设第三列所填 6 个数字按从小到大的顺序排列后依次为 A, B, C, D, E, F .

因为 A 所在行前面需要填两个比 A 小的数字, 所以 A 不小于 3; 因为 B 所在行前面需要填两个比 B 小的数字, 且 A 及 A 所在行前面两个数字都比 B 小, 所以 B 不小于 6.

同理可知: C 不小于 9, D 不小于 12, E 不小于 15, F 不小于 18.

因此, 第三列所填 6 个数字之和 $A + B + C + D + E + F \geq 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 = 63$.

如图即为使得第三列所填 6 个数字之和取得最小值的一种填法 (后三列的数字填法不唯一).

1	2	3	19	20	21
4	5	6	25	27	29
7	8	9	22	23	24
10	11	12	26	28	30
13	14	15	31	34	35
16	17	18	32	33	36

第一试(B)

一、选择题: (本题满分 42 分, 每小题 7 分)

1. 设实数 a, b, c 满足: $a + b + c = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 4$, 则 $\frac{a^2 + b^2}{2 - c} + \frac{b^2 + c^2}{2 - a} + \frac{c^2 + a^2}{2 - b} =$ ()

A.12.

B.9.

C.6.

D.3.

【答】B. 解答与 (A) 卷第 1 题相同.

2. 题目和解答与 (A) 卷第 2 题相同.

3. 题目和解答与 (A) 卷第 3 题相同.

4. 已知实数 x, y 满足关系式 $x^2 + xy + y^2 = 3$, 则 $(x - y)^2$ 的最大值为 ()

- A. 3.
- B. 6.
- C. 9.
- D. 12.

【答】D.

设 $x - y = t$, 则 $x = y + t$, 代入题设等式得 $(y + t)^2 + (y + t)y + y^2 = 3$, 整理得 $3y^2 + 3ty + t^2 - 3 = 0$.

由判别式 $\Delta = (3t)^2 - 12(t^2 - 3) \geq 0$ 得 $-2\sqrt{3} \leq t \leq 2\sqrt{3}$, 故 $(x - y)^2 = t^2 \leq 12$.

5. 题目和解答与 (A) 卷第 4 题相同.

6. 设 n 是小于 100 的正整数且使 $2n^2 - 3n - 2$ 是 6 的倍数, 则符合条件的所有正整数 n 的和是 ()

- A. 784.
- B. 850.
- C. 1536.
- D. 1634.

【答】D.

$\because 2n^2 - 3n - 2$ 是 6 的倍数, $\therefore 2 | (2n^2 - 3n - 2)$, $\therefore 2 | 3n$, $\therefore 2 | n$, 设 $n = 2m$ (m 是正整数),

则 $2n^2 - 3n - 2 = 8m^2 - 6m - 2 = 6m^2 - 6m + 2(m^2 - 1)$.

$\because 2n^2 - 3n - 2$ 是 6 的倍数, $\therefore m^2 - 1$ 是 3 的倍数, $\therefore m = 3k + 1$ 或 $m = 3k + 2$, 其中 k 是非负整数.

$\therefore n = 2(3k + 1) = 6k + 2$ 或 $n = 2(3k + 2) = 6k + 4$, 其中 k 是非负整数.

\therefore 符合条件的所有正整数 n 的和是 $(2 + 8 + 14 + \dots + 86 + 92 + 98) + (4 + 10 + 16 + \dots + 82 + 88 + 94) = 1634$.

二、填空题: (本题满分 28 分, 每小题 7 分)

1. 题目和解答与 (A) 卷第 1 题相同.

2. 三边长均为整数且周长为 24 的三角形的个数为_____.

【答】12.

设三角形的三边长为 a, b, c ($a \geq b \geq c$), 则 $3a \geq a + b + c = 24$, $2a < a + (b + c) = 24$, 所以

$8 \leq a < 12$, 故 a 的可能取值为 8, 9, 10 或 11, 满足题意的数组 (a, b, c) 可以为:

- (8, 8, 8), (9, 9, 6), (9, 8, 7), (10, 10, 4), (10, 9, 5), (10, 8, 6),
- (10, 7, 7), (11, 11, 2), (11, 10, 3), (11, 9, 4), (11, 8, 5), (11, 7, 6),

共 12 组, 所以, 三边长均为整数且周长为 24 的三角形的个数为 12.

3. C, D 两点在以 AB 为直径的半圆周上, AD 平分 $\angle BAC$, $AB = 20$, $AD = 4\sqrt{15}$, 则 AC 的长为_____.

【答】4.

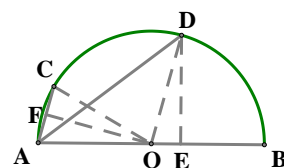
连接 OD, OC , 作 $DE \perp AB$ 于 E , $OF \perp AC$ 于 F .

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle DOB = 2\angle BAD = \angle OAC$.

又 $OA = OD$, $\therefore \triangle AOF \cong \triangle ODE$, $\therefore OE = AF$, $\therefore AC = 2OF = 2OE$.

设 $AC = 2x$, 则 $OE = AF = x$. 在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中, 由勾股定理得 $DE = \sqrt{OD^2 - OE^2} = \sqrt{100 - x^2}$.

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AD^2 = DE^2 + AE^2$, 即 $(4\sqrt{15})^2 = (100 - x^2) + (10 + x)^2$, 解得 $x = 2$.



$\therefore AC = 2x = 4.$

4. 在圆周上按序摆放和为 15 的五个互不相等的正整数 a, b, c, d, e , 使得 $ab+bc+cd+de+ea$ 最小, 则这个最小值为_____.

【答】 37.

和为 15 的五个互不相等的正整数只能是 1, 2, 3, 4, 5.

注意到五个数在圆周上是按序摆放的, 且考虑的是和式 $ab+bc+cd+de+ea$, 不妨设 $a = 5$.

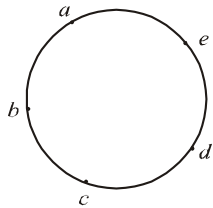


图 1

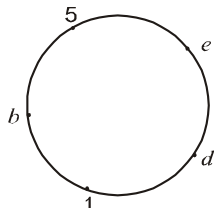


图 2

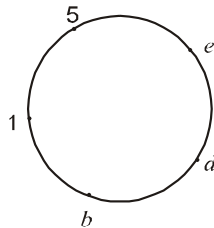


图 3

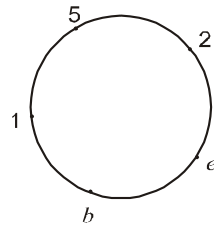


图 4

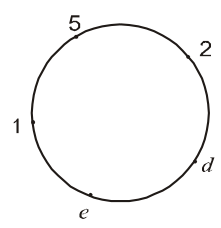


图 5

如果 1 和 5 的位置不相邻, 不妨设 $c = 1$ (如图 2), 此时的和式为 $P_1 = 5b + b + d + ed + 5e$; 交换 1 和 b 的位置后, 得到如图 3 的摆法, 此时的和式为 $P_2 = 5 + b + bd + ed + 5e$. 因为 $P_1 - P_2 = 5b + d - 5 - bd = (5 - d)(b - 1) > 0$, 所以 $P_1 > P_2$. 因此, 交换 1 和 b 的位置使得 1 和 5 相邻 (如图 3) 以后, 和式的值会变小.

如图 3, 如果 $d = 2$, 此时的和式为 $P_3 = 5 + b + 2b + 2e + 5e$; 交换 e 和 2 的位置以后, 得到如图 4 的摆法, 此时的和式为 $P_4 = 5 + b + be + 2e + 10$. 因为 $P_3 - P_4 = 2b + 5e - be - 10 = (5 - b)(e - 2) > 0$, 所以 $P_3 > P_4$, 因此, 交换 e 和 2 的位置使得 2 和 5 相邻以后和式的值会变小.

如果 $b = 2$, 此时的和式为 $P_5 = 5 + 2 + 2d + ed + 5e$; 交换 e 和 2 的位置以后, 得到如图 5 的摆法, 此时的和式为 $P_6 = 5 + e + ed + 2d + 10$. 因为 $P_5 - P_6 = 2 + 5e - e - 10 = 4(e - 2) > 0$, 所以 $P_5 > P_6$, 因此, 交换 e 和 2 的位置使得 2 和 5 相邻以后和式的值会变小.

综上所述: 1 和 2 摆在 5 的两边 (如图 5) 时, 和式的值会变小.

当 $d = 3, e = 4$ 时, 和式的值为 $P_7 = 5 + 4 + 12 + 6 + 10 = 37$; 当 $d = 4, e = 3$ 时, 和式的值为 $P_8 = 5 + 3 + 12 + 8 + 10 = 38$.

因此, 所求最小值为 37.

第二试 (A)

一、(本题满分 20 分) 关于 x 的方程 $\sqrt{x^2 - m} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ 有且仅有一个实数根, 求实数 m 的取值范围.

解 将所给方程记为方程①, 显然有 $x^2 \geq m$ 且 $x \geq 1$.

若 $m < 0$, 则 $\sqrt{x^2 - m} + 2\sqrt{x^2 - 1} > x$, 此时方程①无解, 不符合题意, 故 $m \geq 0$5 分

方程①变形得 $2\sqrt{x^2-1} = x - \sqrt{x^2-m}$ ，两边平方后整理得 $2x^2 + m - 4 = -2x\sqrt{x^2-m}$ ，再平方，整理得 $8(2-m)x^2 = (m-4)^2$ 。

显然，应该有 $0 \leq m < 2$ ，并且此时方程①只可能有解 $x = \frac{4-m}{\sqrt{8(2-m)}}$ 。15分

将 $x = \frac{4-m}{\sqrt{8(2-m)}}$ 代入方程①，得 $\sqrt{\frac{(m-4)^2}{8(2-m)} - m} + 2\sqrt{\frac{(m-4)^2}{8(2-m)} - 1} = \frac{4-m}{\sqrt{8(2-m)}}$ ，化简整理得

$|3m-4| \leq 4-m$ ，于是有 $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$ ，此时方程①有唯一解 $x = \frac{4-m}{\sqrt{8(2-m)}}$ 。

综上所述，所求实数 m 的取值范围为 $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$ 。20分

二、(本题满分 25 分) 如图，圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 E ，且 $AC \perp BD$ ， $AB = AC$ 。过点 D 作 $DF \perp BD$ ，交 BA 的延长线于点 F ， $\angle BFD$ 的平分线分别交 AD 、 BD 于点 M 、 N 。

(1) 证明： $\angle BAD = 3\angle DAC$ ；

(2) 如果 $\frac{BF-DF}{BD} = \frac{CD}{AC}$ ，证明： $MN = MD$ 。

证明 (1) 在 BE 上取一点 P ，使得 $\angle BAP = \angle DAC$ ，则 $\triangle BAP \cong \triangle CAD$ ， $\therefore AP = AD$ 。

又 $AE \perp PD$ ， $\therefore \triangle ADE \cong \triangle APE$ ， $\therefore \angle PAE = \angle DAE$ ， $\therefore \angle PAE = \angle BAP = \angle DAC$ ， $\therefore \angle BAD = 3\angle DAC$ 。10分

(2) 设 $\angle DAC = \alpha$ ，则 $\angle BAC = 2\alpha$ ， $\angle BAD = 3\alpha$ ， $\angle NDM = 90^\circ - \alpha$ 。

在 FB 上截取 $FQ = FD$ ，连接 QD ，则 $BQ = BF - FQ = BF - FD$ 。

又 $\frac{BF-DF}{BD} = \frac{CD}{AC}$ ， $\therefore \frac{BQ}{BD} = \frac{CD}{AC}$ ，又 $\angle QBD = \angle DCA$ ， $\therefore \triangle QBD \sim$

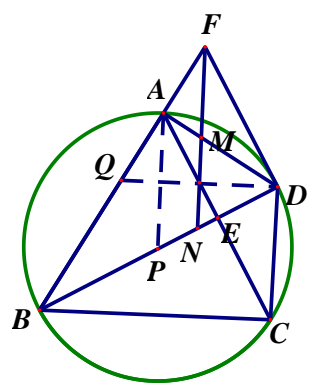
$\triangle DCA$ ， $\therefore \angle QDB = \angle DAC$ 。又 $\angle DBC = \angle DAC$ ， $\therefore \angle QDB = \angle DBC$ ，

$\therefore QD \parallel BC$ ， $\therefore \angle FQD = \angle ABC$ 。

又 $AB = AC$ ， $\angle BAC = 2\alpha$ ， $\therefore \angle ABC = 90^\circ - \alpha$ ， $\therefore \angle FQD = 90^\circ - \alpha$ ，又 $FQ = FD$ ， $\therefore \angle BFD = 2\alpha$ 。

$\therefore FN$ 平分 $\angle BFD$ ， $\therefore \angle AFM = \alpha$ ， $\therefore \angle NMD = \angle AMF = \angle BAD - \angle AFM = 3\alpha - \alpha = 2\alpha$ 。

$\therefore \angle MND = 180^\circ - \angle NMD - \angle NDM = 90^\circ - \alpha = \angle MDN$ ， $\therefore MN = MD$ 。25分



三、(本题满分 25 分) 设正整数 m, n 满足：关于 x 的方程 $(x+m)(x+n) = x+m+n$ 至少有一个正整数解，证明： $2(m^2 + n^2) < 5mn$ 。

解 方程即

$$x^2 + (m+n-1)x + mn - m - n = 0 \quad \text{①}$$

方程①的判别式

$$\Delta = (m+n-1)^2 - 4(mn-m-n) = (m+n)^2 - 4mn + 2(m+n) + 1 = (m-n)^2 + 2(m+n) + 1.$$

.....5分

不妨设 $m \geq n$ ，由题设可知，整系数方程①至少有一个正整数解，所以 Δ 应为完全平方数。

注意到 $\Delta = (m-n)^2 + 2(m+n) + 1 = (m-n+1)^2 + 4n > (m-n+1)^2$,

$$\Delta = (m-n)^2 + 2(m+n) + 1 = (m-n+3)^2 - (4m-8n+8),$$

若 $4m-8n+8 > 0$ ，即 $m > 2n-2$ ，则 $\Delta < (m-n+3)^2$ ，从而有 $(m-n+1)^2 < \Delta < (m-n+3)^2$ ，故

只可能 $\Delta = (m-n+2)^2$ ，即 $(m-n)^2 + 2(m+n) + 1 = (m-n+2)^2$ ，整理得 $m = 3n - \frac{3}{2}$ ，这与 m, n 均为正整数矛盾。

因此 $m \leq 2n-2$ ，从而可得 $m < 2n$ ，所以 $\frac{m}{n} < 2$20分

又因为 $\frac{m}{n} > 1 > \frac{1}{2}$ ，所以有 $(\frac{m}{n} - \frac{1}{2})(\frac{m}{n} - 2) < 0$ ，整理即得 $2(m^2 + n^2) < 5mn$.

.....25分

第二试 (B)

一、(本题满分 20 分) 若正数 a, b 满足 $ab=1$ ，求 $M = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2b}$ 的最小值。

解 因为 $ab=1$ ，所以 $b = \frac{1}{a}$ ，所以

$$M = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2b} = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+\frac{2}{a}} = \frac{1}{1+a} + \frac{a}{2+a} = 1 + \frac{1}{1+a} - \frac{2}{2+a} = 1 - \frac{a}{a^2+3a+2}.$$

.....5分

设 $N = \frac{a^2+3a+2}{a}$ ，则 $N = a + \frac{2}{a} + 3 = (\sqrt{a} - \sqrt{\frac{2}{a}})^2 + 3 + 2\sqrt{2} \geq 3 + 2\sqrt{2}$ ，当 $a = \sqrt{2}$ 时取得等号。

.....10分

所以， $0 < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}$ ， $M = 1 - \frac{1}{N} \geq 1 - (3-2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$ 。

因此，当 $a = \sqrt{2}$ ， $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时， $M = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+2b}$ 取得最小值 $2\sqrt{2} - 2$20分

二、(本题满分 25 分) 如图，圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 交于点 E ，且 $AC \perp BD$ ， $AB = AC = BD$ 。过点 D 作 $DF \perp BD$ ，交 BA 的延长线于点 F ， $\angle BFD$ 的平分线分别交 AD 、 BD 于点 M 、 N 。

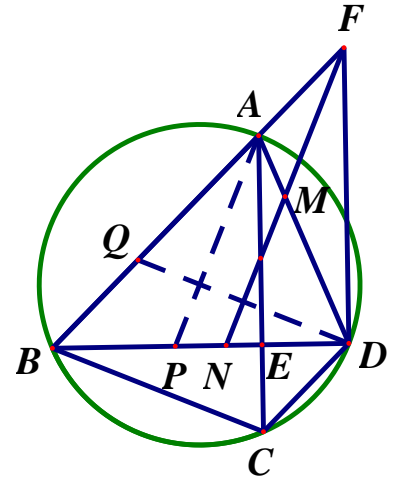
(1) 证明： $\angle BAD = 3\angle DAC$ ；

(2) 如果 $MN = MD$ ，证明： $BF = CD + DF$ 。

证明 (1) 在 BE 上取一点 P ，使得 $\angle BAP = \angle DAC$ ，则 $\triangle BAP \cong \triangle CAD$ ， $\therefore AP = AD$ 。

又 $AE \perp PD$, $\therefore \triangle ADE \cong \triangle APE$, $\therefore \angle PAE = \angle DAE$, $\therefore \angle PAE = \angle BAP = \angle DAC$, $\therefore \angle BAD = 3\angle DAC$10分

(2) 设 $\angle DAC = \alpha$, 则 $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle BAD = 3\alpha$. $\because AC \perp BD$, $\therefore \angle NDM = 90^\circ - \alpha$. $\because MN = MD$, $\therefore \angle MND = \angle MDN = 90^\circ - \alpha$, $\therefore \angle NMD = 180^\circ - \angle MND - \angle NDM = 2\alpha$, $\therefore \angle AMF = 2\alpha$, $\therefore \angle AFM = \angle BAD - \angle AMF = 3\alpha - 2\alpha = \alpha$. $\therefore FN$ 平分 $\angle BFD$, $\therefore \angle BFD = 2\angle AFM = 2\alpha$.



在 FB 上截取 $FQ = FD$, 连接 QD , 则 $\angle FQD = 90^\circ - \alpha$.

又 $\because AB = AC$, $\angle BAC = 2\alpha$, $\therefore \angle ABC = 90^\circ - \alpha$, $\therefore \angle FQD = \angle ABC$, $\therefore QD \parallel BC$, $\therefore \angle QDB = \angle DBC$.

又 $\because \angle DBC = \angle DAC$, $\therefore \angle QDB = \angle DAC$.

又 $\because DB = AC$, $\angle QBD = \angle DCA$, $\therefore \triangle QBD \cong \triangle DCA$, $\therefore BQ = CD$.

$\therefore BF = BQ + FQ = CD + DF$25分

三、(本题满分 25 分) 若关于 x 的方程 $x^2 - 34x + 34k - 1 = 0$ 至少有一个正整数根, 求满足条件的正整数 k 的值.

解 设方程的两个根为 x_1, x_2 , 且 x_1 为正整数, 则 $x_1 + x_2 = 34$, $x_1 x_2 = 34k - 1$.

由 $x_1 + x_2 = 34$ 知 $x_2 = 34 - x_1$, $\therefore x_2$ 也是整数. 由 k 为正整数及 $x_1 x_2 = 34k - 1$ 可知 $x_2 > 0$, $\therefore x_2$ 是正整数.5分

注意到 $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 34(k + 1)$, $\therefore 17 \mid (x_1 + 1)(x_2 + 1)$, $\therefore 17 \mid (x_1 + 1)$ 或 $17 \mid (x_2 + 1)$10分

若 $17 \mid (x_1 + 1)$, 则由 $x_1 + 1 \leq x_1 + x_2 = 34$ 知: $x_1 + 1 = 17$ 或 $x_1 + 1 = 34$.

当 $x_1 + 1 = 17$ 时, $x_1 = 16$, $x_2 = 18$, 此时 $34k - 1 = 16 \times 18$, k 无整数解;

当 $x_1 + 1 = 34$ 时, $x_1 = 33$, $x_2 = 1$, 此时 $34k - 1 = 33 \times 1$, 解得 $k = 1$.

若 $17 \mid (x_2 + 1)$, 同样可得 $k = 1$.

所以, 满足条件的正整数 $k = 1$25分