2015 年全国初中数学联合竞赛（初二年级）试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设 7 分和 0 分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试(A)

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1. 若 $x^2+y^2+2z^2-xy-2yz-2x+2=0$，则 $x+y+z=$ （　　）

A.3.　　B.4.　　C.5.　　D.6.

【答】C.

$\because x^2+y^2+2z^2-xy-2yz-2x+2=0$，$\therefore 2x^2+2y^2+4z^2-2xy-4yz-4x+4=0$，

$\therefore (x^2-2xy+y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2-4yz+4z^2)=0$，

$\therefore (x-y)^2+(x-2)^2+(y-2z)^2=0$，$\therefore x=y=2$，$z=1$，$\therefore x+y+z=5$.

2. 设实数 a,b,c 满足：$a+b+c=3$，$a^2+b^2+c^2=4$，则 $\dfrac{a^2+b^2}{2-c}+\dfrac{b^2+c^2}{2-a}+\dfrac{c^2+a^2}{2-b}=$ （　　）

A.9.　　B.6.　　C.3.　　D.0.

【答】A.

$\because a+b+c=3$，$a^2+b^2+c^2=4$，

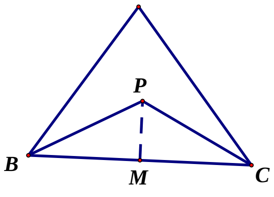
$$\therefore \frac{a^2+b^2}{2-c}+\frac{b^2+c^2}{2-a}+\frac{c^2+a^2}{2-b}=\frac{4-c^2}{2-c}+\frac{4-a^2}{2-a}+\frac{4-b^2}{2-b}=(2+c)+(2+a)+(2+b)$$

$=6+(a+b+c)=9$.

3. 锐角△ ABC 中，BC 边的中垂线和 $\angle ABC$ 的角平分线相交于点 P．若 $\angle A=72°$，$\angle ACP=24°$，则 $\angle ABP=$ （　　）

A. 24°.　　B. 28°.　　C. 30°.　　D. 36°.

【答】B.



∵直线 BP 为∠ABC 的角平分线，∴∠ABP＝∠CBP.

∵直线 PM 为 BC 的中垂线，∴BP＝CP，∴∠CBP＝∠BCP，∴∠ABP＝∠CBP＝∠BCP.

在△ABC 中，三内角之和为 180°，∴3∠ABP＋∠A＋∠ACP＝180°，即 3∠ABP＋72°＋24°＝180°，解得∠ABP＝28°.

4. 三边长均为整数且周长为 24 的三角形的个数为 （　　）

A.11.　　B.12.　　C.17.　　D.18.

【答】B.

设三角形的三边长为 a,b,c（$a\ge b\ge c$），则 $3a\ge a+b+c=24$，$2a<a+(b+c)=24$，所以 $8\le a<12$，故 a 的可能取值为 8，9，10 或 11，满足题意的数组（a,b,c）可以为：

（8，8，8），（9，9，6），（9，8，7），（10，10，4），（10，9，5），（10，8，6），
（10，7，7），（11，11，2），（11，10，3），（11，9，4），（11，8，5），（11，7，6），
共 12 组，所以，三边长均为整数且周长为 24 的三角形的个数为 12.

5. 设 $A=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2014^2}+\frac{1}{2015^2}}$，则不超过 A 的最大整数为（　　）

A.2017.　　B.2016.　　C.2015.　　D.2014.

【答】D.

对于正整数 n，有

$$1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=(1+\frac{1}{n})^2-\frac{2}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}=(\frac{n+1}{n})^2-\frac{2}{n}+(\frac{1}{n+1})^2=(\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1})^2,$$

所以 $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，故

$$A=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2014^2}+\frac{1}{2015^2}}$$

$$=(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(1+\frac{1}{2014}-\frac{1}{2015})=2015-\frac{1}{2015},$$

因此，不超过 A 的最大整数为 2014.

6. 满足 $a+\frac{10b}{a^2+b^2}=5$，$b+\frac{10a}{a^2+b^2}=4$ 的整数对 (a,b) 的组数为（　　）

A.4.　　B.3.　　C.2.　　D.1.

【答】C.

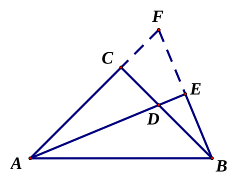
易知 $ab\neq 0$，由题设条件可得 $\frac{10}{a^2+b^2}=\frac{5-a}{b}=\frac{4-b}{a}$，设比值为 k，则 $5-a=kb$，　$5-a=kb$，$4-b=ka$，所以 $(5-a)b=kb^2$，$(4-b)a=ka^2$，所以 $k(a^2+b^2)=(4-b)a+(5-a)b=4a+5b-2ab$.

又因为 $\frac{10}{a^2+b^2}=k$，所以 $k(a^2+b^2)=10$，所以 $4a+5b-2ab=10$，即 $2ab-4a-5b+10=0$，分解因式得 $(2a-5)(b-2)=0$，所以 $b=2$ 或 $a=\frac{5}{2}$（舍去）.

把 $b=2$ 代入 $a+\frac{10b}{a^2+b^2}=5$ 得 $(a^2+4)(5-a)=20$，则 a^2+4 和 $5-a$ 都是 20 的正约数，验证可知：$a=1$ 和 $a=4$ 符合.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1. 在直角△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=\sqrt{2}$，AD 为 $\angle CAB$ 的平分线，$BE\perp AD$ 交 AD 的延长线于点 E，则 $AE=$______.



【答】$\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

延长 AC、BE 交于点 F，易证△$BCF\cong$△ACD，$\therefore CF=CD$，$BF=AD$.

易证△ABE≌△AFE，∴ $AF=AB$， $BE=EF=\frac{1}{2}BF$.

∴ $CD=CF=AF-AC=AB-AC=2-\sqrt{2}$，

∴ $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2-\sqrt{2}}$，∴ $BE=\frac{1}{2}AD=\sqrt{2-\sqrt{2}}$，

∴ $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{2-\sqrt{2}})^2}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

2. 已知a,b为实数，对任何满足$0\le x\le 1$的实数x，都有$|ax+b|\le 1$成立，则a的最大值为______.

【答】2.

令$x=0$，得$|b|\le 1$；令$x=1$，得$|a+b|\le 1$. 于是可得$|a|=|(a+b)-b|\le |a+b|+|b|\le 1+1=2$，所以$a\le 2$.

又易知：$a=2$，$b=-1$时，对任何满足$0\le x\le 1$的实数x，都有$|2x-1|\le 1$成立.

所以，a的最大值为 2.

3. 设n是小于 100 的正整数且使$2n^2-3n-2$是 6 的倍数，则符合条件的所有正整数n的和是_____.

【答】1634.

∵ $2n^2-3n-2$是 6 的倍数，∴ $2\mid(2n^2-3n-2)$，∴ $2\mid 3n$，∴ $2\mid n$，设$n=2m$（m是正整数），

则$2n^2-3n-2=8m^2-6m-2=6m^2-6m+2(m^2-1)$.

∵ $2n^2-3n-2$是 6 的倍数，∴ m^2-1是 3 的倍数，∴ $m=3k+1$或$m=3k+2$，其中k是非负整数.

∴ $n=2(3k+1)=6k+2$或$n=2(3k+2)=6k+4$，其中k是非负整数.

∴符合条件的所有正整数n的和是（2＋8＋14＋…＋86＋92＋98）＋（4＋10＋16＋…＋82＋88＋94）＝1634.

4. 将数字 1，2，3，……，34，35，36 填在 6×6 的方格中，每个方格填一个数字，要求每行数字从左到右是从小到大的顺序，则第三列所填 6 个数字的和的最小值为______.

【答】63.

设第三列所填 6 个数字按从小到大的顺序排列后依次为A，B，C，D，E，F.

因为A所在行前面需要填两个比A小的数字，所以A不小于 3；因为B所在行前面需要填两个比B小的数字，且A及A所在行前面两个数字都比B小，所以B不小于 6.

同理可知：C不小于 9，D 不小于 12，E 不小于 15，F 不小于 18.

因此，第三列所填 6 个数字之和$A+B+C+D+E+F\ge 3+6+9+12+15+18=63$.

如图即为使得第三列所填 6 个数字之和取得最小值的一种填法（后三列的数字填法不唯一）.

1	2	3	19	20	21
4	5	6	25	27	29
7	8	9	22	23	24
10	11	12	26	28	30
13	14	15	31	34	35
16	17	18	32	33	36

第一试(B)

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1. **题目和解答与（A）卷第 1 题相同.**
2. **题目和解答与（A）卷第 2 题相同.**
3. **题目和解答与（A）卷第 3 题相同.**
4. **题目和解答与（A）卷第 4 题相同.**

5. $|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$ 的最小值为 （　　）

A.4.　　B.5.　　C.6.　　D.10.

【答】A.

$|x-1|+|x-4|\ge|(x-1)-(x-4)|=3$，当 $1\le x\le4$ 时取得等号；

$|x-2|+|x-3|\ge|(x-2)-(x-3)|=1$，当 $2\le x\le3$ 时取得等号；

因此，$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|\ge3+1=4$，当 $2\le x\le3$ 时取得等号.

所以，$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$ 的最小值为 4.

6. **题目和解答与（A）卷第 6 题相同.**

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $[\sqrt{1\times2}]+[\sqrt{2\times3}]+[\sqrt{3\times4}]+\cdots+[\sqrt{100\times101}]$ 的值为_____.

【答】5050.

对于正整数 n，显然有 $n<\sqrt{n\times(n+1)}<n+1$，所以 $[\sqrt{n\times(n+1)}]=n$，所以

$[\sqrt{1\times2}]+[\sqrt{2\times3}]+[\sqrt{3\times4}]+\cdots+[\sqrt{100\times101}]$＝1＋2＋3＋…＋100＝5050.

2. **题目和解答与（A）卷第 1 题相同.**
3. **题目和解答与（A）卷第 3 题相同.**
4. **题目和解答与（A）卷第 4 题相同.**

第二试 （A）

一、（本题满分 20 分）求所有的两位数 A，使得 A^2 的末两位数字构成的数恰好为 A.

解　设 $A=10a+b$，其中 a,b 均为整数且 $1\le a\le9$，$0\le b\le9$，则

$A^2-A=(10a+b)^2-(10a+b)=100a^2+10a(2b-1)+b^2-b$. **……………………5 分**

由题意可知，A^2-A 的末两位数字均为 0，所以 $b^2-b=b(b-1)$ 必为 10 的倍数，验证可知：只可能 b＝5 或 6 或 0. **……………………10 分**

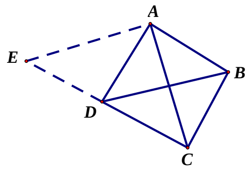
当 b＝5 时，$A^2-A=100a^2+90a+20=100a^2+100a+10(2-a)$，只可能 $a=2$，此时 A＝25；

当 b＝6 时，$A^2-A=100a^2+110a+30=100a^2+100a+10(3+a)$，只可能 $a=7$，此时 A＝76；

当 $b=0$ 时，$A^2-A=100a^2-10a$，只可能 $a=0$，不符合，舍去；

综上所述，符合要求的两位数为 25 和 76.　　　　　　　　　　　　**……………………20 分**

二、（本题满分 25 分） 在四边形 $ABCD$ 中，$AC=4$，$CD=3$，$\angle ADB=\angle ABD=\angle ACD=45^\circ$，求 BC.



解　在 CD 的延长线上取一点 E，使 $\angle DAE=\angle CAB$，则 $\angle CAE=90^\circ$，又 $\angle ACD=45^\circ$，$\therefore \angle AED=45^\circ$，$\therefore AE=AC$.

$\because \angle ADB=\angle ABD=45^\circ$，$\therefore AD=AB$.　　　　**……………………10 分**

$\because AE=AC$，$\angle DAE=\angle CAB$，$AD=AB$，$\therefore \triangle EAD\cong\triangle CAB$，$\therefore BC=ED$.

在 Rt$\triangle EAC$ 中，$AC=4$，$\angle AEC=45^\circ$，$\therefore CE=4\sqrt{2}$，

$\therefore ED=CE-CD=4\sqrt{2}-3$，$\therefore BC=4\sqrt{2}-3$. **……………………25 分**

三．（本题满分 25 分） 已知实数 a,b,c 满足条件 $\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}=0$. 求代数式 $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}$ 的值.

解　$(\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b})(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b})=\dfrac{a}{(b-c)^2}+\dfrac{b}{(c-a)^2}+\dfrac{c}{(a-b)^2}+$

$\dfrac{a}{b-c}\cdot(\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b})+\dfrac{b}{c-a}\cdot(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{a-b})+\dfrac{c}{a-b}\cdot(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a})$

$$=\frac{a(c-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}+\frac{b(a-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}+\frac{c(b-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0 \qquad ①$$

……………………10 分

显然 a,b,c 互不相等，所以

$(a-b)(b-c)(c-a)(\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b})$

$=(a-b)(c-a)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)$

$=ac-a^2-bc+ab+ab-ac-b^2+bc+bc-ab-c^2+ac$

$=-a^2-b^2-c^2+ab+bc+ac=-\dfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\neq 0$，

$\therefore \dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}+\dfrac{1}{a-b}\neq 0$，

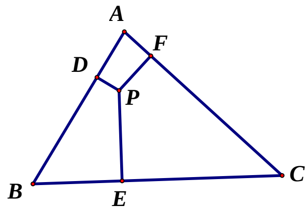
结合①式得 $\dfrac{a}{b-c}+\dfrac{b}{c-a}+\dfrac{c}{a-b}=0$.　　　　　　**……………………25 分**

第二试 （B）

一、（本题满分 20 分）题目和解答与（A）卷第一题相同.

二、（本题满分 25 分）如图，过△ABC 内一点 P 作三边的垂线，垂足分别为 D、E、F，已知 $AB=5$，$BC=7$，$AC=6$，$BE-AD=1$，求 $AD+BE+CF$.

解 设 $AD=x,BE=y,CF=z$，则 $BD=5-x,CE=7-y,AF=6-z$.



连接 PA，PB 和 PC，

在 Rt△PBD 和 Rt△PBE 中，由勾股定理可得 $BD^2+PD^2=PB^2=BE^2+PE^2$，

即 $(5-x)^2+PD^2=y^2+PE^2$，

同理可得 $(7-y)^2+PE^2=z^2+PF^2$，$(6-z)^2+PF^2=x^2+PD^2$. ……………………**15 分**

将以上三式相加，得 $(5-x)^2+(7-y)^2+(6-z)^2=x^2+y^2+z^2$，所以 $5x+7y+6z=55$.

又由已知条件得 $y-x=BE-AD=1$，于是可得

$$AD+BE+CF=x+y+z=\frac{1}{6}[(5x+7y+6z)-(y-x)]=\frac{1}{6}[55-1]=6.$$ ……………………**25 分**

三、（本题满分 25 分）已知非零实数 a,b,c 满足 $a+b+c=2$，$\frac{(1-a)^2}{bc}+\frac{(1-b)^2}{ac}+\frac{(1-c)^2}{ab}=3$，求 $ab+bc+ca$ 的值.

解 由 $\frac{(1-a)^2}{bc}+\frac{(1-b)^2}{ac}+\frac{(1-c)^2}{ab}=3$ 得 $a(1-a)^2+b(1-b)^2+c(1-c)^2=3abc$，整理即得

$$(a+b+c)-2(a^2+b^2+c^2)+a^3+b^3+c^3-3abc=0$$ ①……………………**10 分**

设 $t=ab+bc+ca$，则

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=4-2t$，

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)[(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]=2[(4-2t)-t]=2(4-3t)$，

①式即 $2-2(4-2t)+2(4-3t)=0$，解得 $t=1$，即 $ab+bc+ca=1$. ……………………**25 分**